Relações Estáticas de modelos NARX MISO e sua Representação de Hammerstein

Antônio H. Ribeiro
Luis A. Aguirre

Departamento de Engenharia Eletrônica, UFMG

Apoio CNPq e Petrobrás

Introdução

- Problemas de Identificação Caixa Preta;
- Modelo de Hammerstein (Narendra and Gallman, 1966);
- Bloco Dinâmico Linear: Função de transferência, Equação de diferenças, Autoregressive model with exogenous input (ARX), Espaços de Estados e outras representações;
- Bloco não-linear sem memória: Polinômial, Splines, Redes neurais e outras;

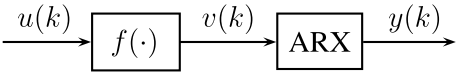


Figura: Modelo de Hammerstein.

Relações estáticas de Modelos NARX SISO

- Modelos não lineares ARX (NARX). Exemplo:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 y^2(k-1) + b_1 u^2(k-1) + b_2 u^2(k-3) \quad (1)$$

- Análise em estado estacionário:

$$u(k) = u(k-1) = \ldots = u(k-n_u) = \bar{u},$$

$$y(k) = y(k-1) = \ldots = y(k-n_y) = \bar{y},$$

- Relação estática correspondente a Eq. 1:

$$\bar{y} = (a_1 + a_2)\bar{y} + a_3\bar{y}^2 + (b_1 + b_2)\bar{u}^2 \quad (2)$$

Relações estáticas de Modelos NARX SISO (cont.)

- Caso Geral:

$$\bar{y} = \sum_{q=0}^{l} \sum_{p=0}^{l-q} C_{p,q} \bar{y}^p \bar{u}^q, \tag{3}$$

- Definição: Agrupamento de termos

  Um agrupamento de termos consiste em todos os termos de mesmo tipo. Representamos o conjunto de todos os termos $y^p(k-i)u^q(k-i)$ como um agrupamento $\Omega_{y^p u^q}$. Exemplo: Os monômios $y^2(k-1)$, $y^2(k-2)$, $y(k-1)y(k-2)$ fazem todos partes do agrupamento Ω_{y^2}

- Definição: Coeficiente de um Agrupamento

  O coeficiente de um agrupamento é a soma de todos os parâmetros dos termos de um mesmo agrupamento. O coeficiente correspondente ao agrupamento $\Omega_{y^p u^q}$ é representado por $\Sigma_{y^p u^q}$.

Relações estáticas de Modelos NARX SISO (cont.)

- No nosso exemplo:

$$\bar{y} = (a_1 + a_2)\bar{y} + a_3\bar{y}^2 + (b_1 + b_2)\bar{u}^2 \tag{4}$$

não é possível encontrar uma função unívoca $\bar{y} = f(\bar{u})$;

- Relação unívoca só é possível se os coeficientes de agrupamento forem tais que $\Sigma_{y^p u^q} = 0$, para $p > 1$. Por exemplo, na relação estática:

$$\bar{y} = (a_1 + a_2)\bar{y} + a_3\bar{y}\bar{u} + (b_1 + b_2)\bar{u}^2 \tag{5}$$

a saída está univocamente relacionada com a entrada:

$$\bar{y} = \frac{(b_1 + b_2)\bar{u}^2}{(a_1 + a_2) + a_3\bar{u}} \tag{6}$$

- Relação além de unívoca é polinomial se $\Sigma_{yu^q} = 0$, para $q \geq 1$;

Motivação o Caso Multivariável

- Problema de identificação onde havia interesse na curva estática;
- Plataforma para a identificação de modelos NARX pronta;
- Análise de estado estacionário de modelos NARX citada anteriormente permite obter modelos de Hammerstein (Aguirre et al., 2005);
- Necessidade de generalização para o caso multivariável;

Modelos de Hammerstein Multivariáveis

- Generalização para o caso multivariável não é trivial;
- Classificação proposta por (Harnischmacher and Marquardt, 2007) ;

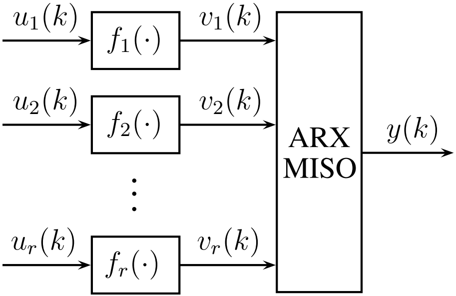


Figura: representação de KU (Kortmann e Unbehauen, 1987)

Modelos de Hammerstein Multivariáveis (cont.)

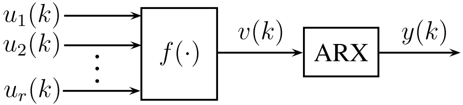


Figura: representação de RO (Rollins e colaboradores,2003))

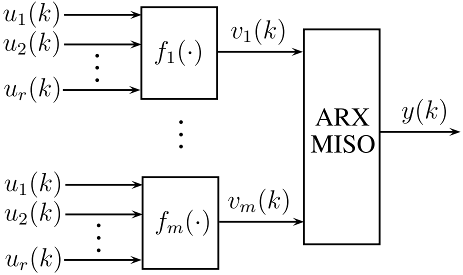


Figura: representação de EJL (Eskinat, Johnson e Luyben, 1991)

Relações estáticas de Modelos NARX MISO

- Relação estática para o caso multivariável:

$$\bar{y} = \sum_i C_i \bar{y}^{p_i} \bar{u}_1^{q_{1,i}} \bar{u}_2^{q_{2,i}} \ldots \bar{u}_r^{q_{r,i}}, \tag{7}$$

- Lema 1
  Se $\Sigma_{y^p u_1^{q_1} u_2^{q_2} \ldots u_r^{q_r}} = 0$, $p > 1$, $\forall q_i, i = 1{,}2{,}\ldots{,}r$, a relação estática (7) será unívoca e poderá ser escrita na forma $\bar{y} = f(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_r)$.

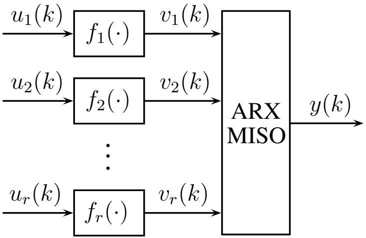
- Lema 2
  A relação estática (7) será unívoca e polinomial se tiver: $\Sigma_{y u_1^{q_1} u_2^{q_2} \ldots u_r^{q_r}} = 0$, $\forall q_i$, excetuado o caso trivial $q_i = 0$, $i = 1, \ldots, r$.

Relações estáticas de Modelos NARX MISO (cont.)

- Lema 3

  A relação estática (7) será unívoca, polinomial e não possuirá termos cruzados de entrada se os coeficientes de agrupamentos cruzados forem nulos, ou seja, $\Sigma_{u_1^{q_1} u_2^{q_2} \ldots u_n^{q_r}} = 0$. Podendo ser escrita como:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{l} c'_{i,j} \bar{u}_i^j + K_0. \tag{8}$$



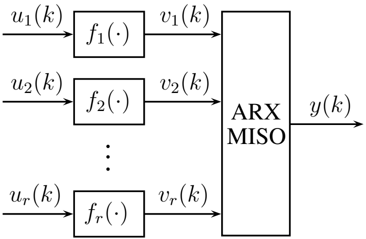
Relações estáticas de Modelos de Hammerstein (cont.)

- As funções estáticas do modelo de Hammerstein são:

$$f_i(\bar{u}_i) = \sum_{j=1}^{l} c'_{i,j}\bar{u}_i^j + K_i \tag{9}$$

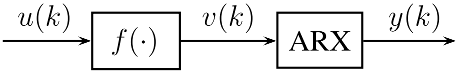
para o qual,

$$\sum_{i=1}^{r} K_i = K_0.$$



Procedimento de Identificação do Modelo de Hammerstein

1. Identificar e validar um modelo NARX;
2. Obter a relação estática do modelo NARX;
3. Obter as funções não lineares estáticas do modelo de Hammerstein;
4. De posse da não linearidade do modelo, obter um conjunto de variáveis intermediárias que permitem obter um modelo ARX MISO que relacione estas com a saída

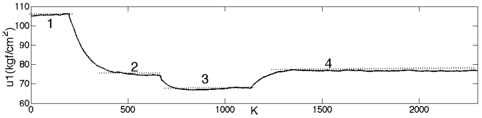


5. Obter o modelo ARX usando técnicas lineares;

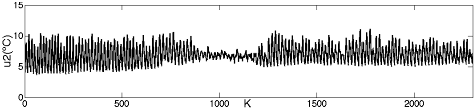
Exemplo Plataforma de Petróleo

- Modelo NARX: Escolha dos termos mais adequados e a estimação de parâmetros foi realizada usando técnicas ortogonais (Chen et al., 1989; Korenberg et al., 1988) e respeitando as restrições impostas pelos três lemas.
- Relação estática:

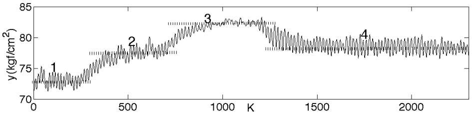
$$\bar{y} = 0{,}0052\bar{u}_1^2 - 1{,}0877\bar{u}_1 - 0{,}2124\bar{u}_2^3 + 4{,}7578\bar{u}_2^2 - 31{,}2152\bar{u}_2 + 190{,}2796. \quad (10)$$



(a)



(b)

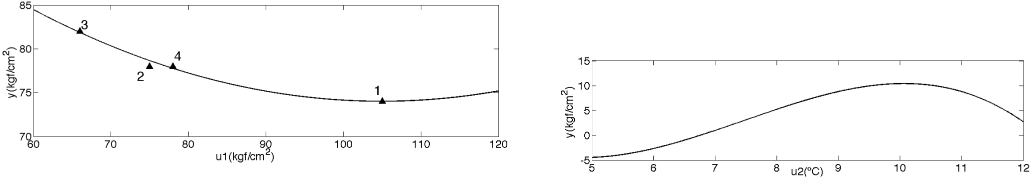


(c)

Exemplo Plataforma de Petróleo (cont.)

- Funções estáticas do modelo de Hammerstein:

$$
\begin{aligned}
f_1(\bar{u}_1) &= 0{,}0052\bar{u}_1^2 - 1{,}0877\bar{u}_1 + 131{,}0690, \\
f_2(\bar{u}_2) &= -0{,}2124\bar{u}_2^3 + 4{,}7578\bar{u}_2^2 - 31{,}2152\bar{u}_2 + 59{,}2107. \\
\bar{y} &= f_1(\bar{u}_1) + f_1(\bar{u}_2)
\end{aligned}
$$



(a) (b)

Figura: Funções estáticas: (a) $f_1(\bar{u}_1)$; (b) $f_2(\bar{u}_2)$.

Exemplo Plataforma de Petróleo (cont.)

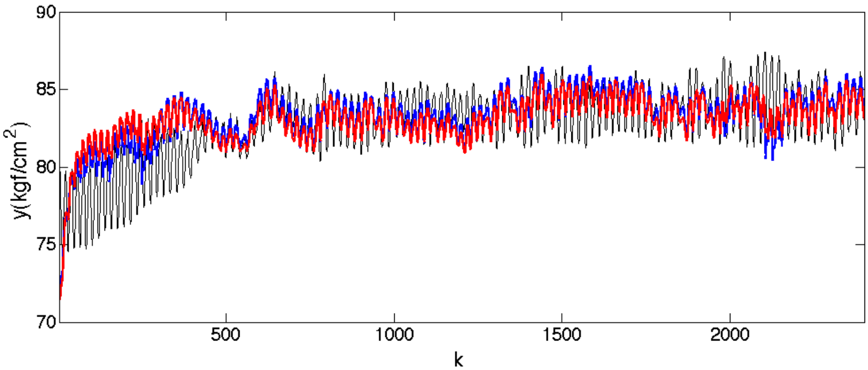


Figura: Dados de validação: Dados medidos em preto, simulação livre do modelo de Hammerstein em azul (MAPE = 1,43%) e simulação livre do modelo NARX (MAPE = 1,34%) em vermelho.

Comentários Finais

- Geralmente o modelo de Hammerstein não tem desempenho superior ao modelo NARX usado para gerá-lo;
- O modelo de Hammerstein pode dar origem a esquema de controle não linear muito simples, e por isso pode ser preferível;
- Esse método de obter o modelo de Hammerstein tem a vantagem de estimar, além dos parâmetros, a estrutura da função não linear estática;
- O número de termos possíveis para a função estática polinômial cresce rápidamente para modelos de Hammerstein multivariáveis. Dessa forma ter um método sistemático de obter a estrutura do modelo é uma grande vantagem desse método;